



**INNOWACYJNA
GOSPODARKA**
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Investujemy
w Waszą
przyszłość



INSTEPRO
Zintegrowane
Sterowanie
Produkcją

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ
ROZWOJU REGIONALNEGO



Raport wewnętrzny projektu InStePro

Nr 3.3b: Analiza i wybór procesów doświadczalnych
dla weryfikacji rozwiązań: układ zbiorników

Data:

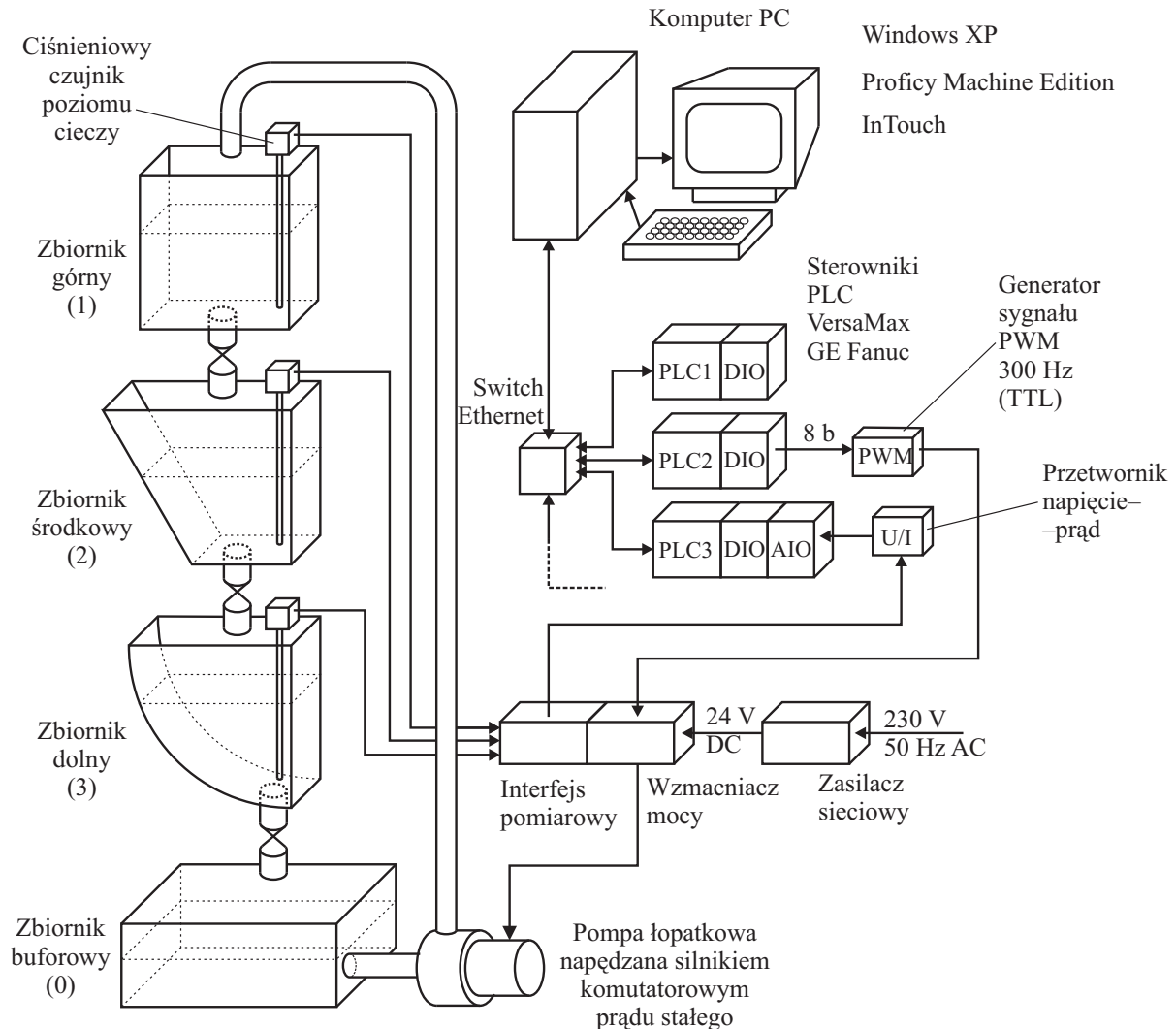
29 czerwca 2010

Przygotował:

Andrzej Tutaj

1 Budowa obiektu regulacji

Rozważany obiekt laboratoryjny to kaskadowy układ czterech zbiorników, pomiędzy którymi przelewa się woda. Przedstawiono go na rysunku 1. Wymiary poszczególnych zbiorników podane są na rysunku 2.



Rysunek 1: Kaskadowy układ zbiorników wraz z systemem sterowania

Tam również zaznaczono powierzchnie swobodne luster cieczy S_i , powierzchnie czołowe napełnionych fragmentów zbiorników A_i oraz objętości zgromadzonej cieczy V_i . Te trzy wielkości są wykorzystywane w podanym dalej modelu matematycznym obiektu. Uproszczony schemat instalacji, przedstawiający obieg wody między zbiornikami, pokazany jest na rysunku 3. Rysunek 4 stanowi pomoc w wyprowadzaniu zależności geometrycznych między zaznaczonymi na nim wielkościami l_i i A_i a znanymi wymiarami zbiorników (d, a, b, c, m, n, r) i poziomami cieczy H_i .

2 Model matematyczny – równania stanu

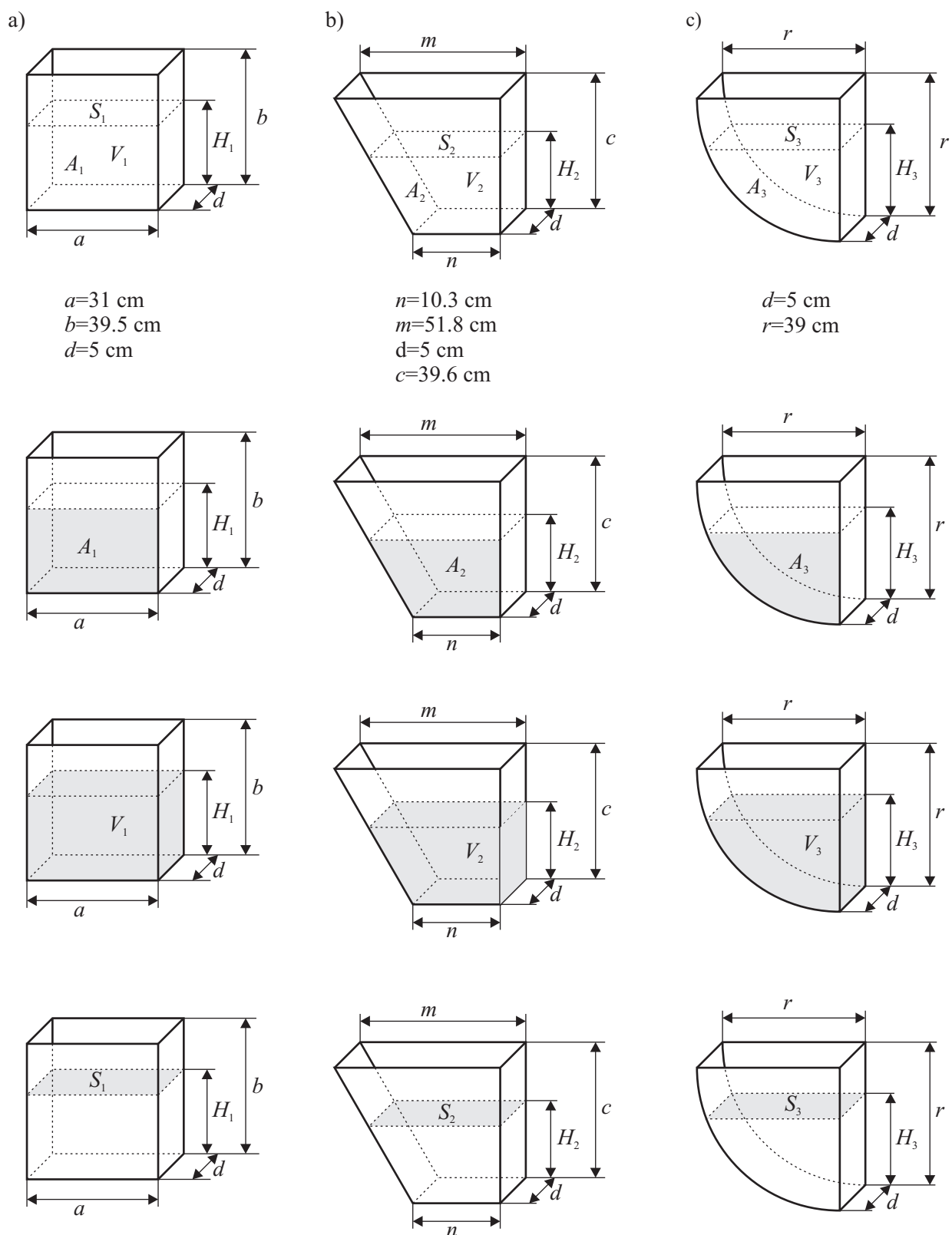
Równania stanu układu trzech kaskadowych zbiorników (bez uwzględniania zbiornika buforowego) można wyprowadzić w oparciu o bilanse masy, zapisane niezależnie dla każdego ze zbiorników

$$\frac{d}{dt}(\rho V_1) = \rho Q_0 - \rho Q_1 - \rho O_1 \quad (1)$$

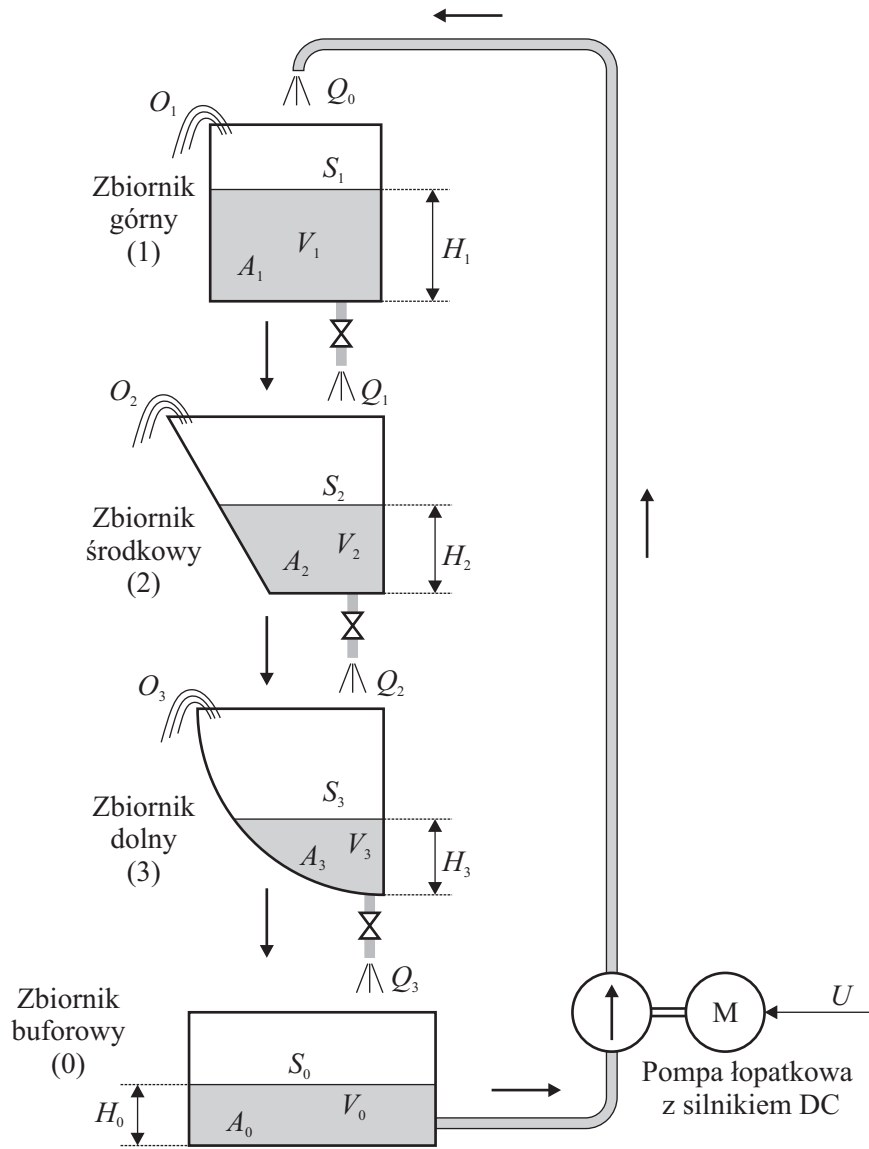
$$\frac{d}{dt}(\rho V_2) = \rho Q_1 - \rho Q_2 - \rho O_2 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho V_3) = \rho Q_2 - \rho Q_3 - \rho O_3 \quad (3)$$

gdzie:

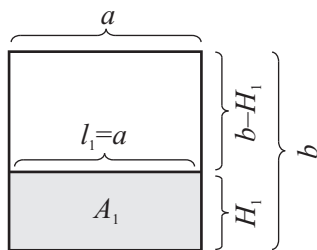


Rysunek 2: Wymiary zbiorników oraz objaśnienie symboli S_i , A_i , V_i : a) zbiornik górny (pierwszy), b) zbiornik środkowy (drugi), c) zbiornik dolny (trzeci)



Rysunek 3: Schemat instalacji z zaznaczeniem obiegu cieczy

Zbiornik górny (1)



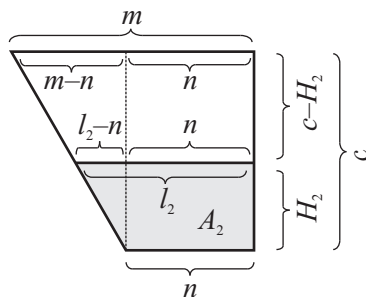
$$S_1 = d \cdot l_1$$

$$l_1 = a$$

$$V_1 = d \cdot A_1$$

$$A_1 = l_1 \cdot H_1 = a \cdot H_1$$

Zbiornik środkowy (2)



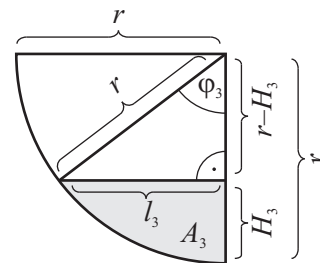
$$S_2 = d \cdot l_2$$

$$l_2 = n + H_2 \cdot (m - n) / c$$

$$V_2 = d \cdot A_2$$

$$A_2 = (n + l_2) \cdot H_2 / 2$$

Zbiornik dolny (3)



$$S_3 = d \cdot l_3$$

$$l_3 = \text{sqrt}(r^2 - (r - H_3)^2)$$

$$V_3 = d \cdot A_3$$

$$A_3 = (r^2 \cdot \text{arc cos}((r - H_3) / r) - (r - H_3) \cdot l_3) / 2$$

Rysunek 4: Zależności geometryczne

V_i – objętość cieczy zgromadzonej w i -tym zbiorniku

Q_i – strumień objętości cieczy wypływającej przez zawór umieszczony w dnie i -tego zbiornika do zbiornika poniżej (dla $i \in \{1, 2, 3\}$) lub z pompy do górnego zbiornika (dla $i = 0$)

O_i – strumień objętości cieczy przelewającej się przez górną krawędź i -tego zbiornika na zewnątrz instalacji, jeśli nastąpiło jego przepełnienie i przelanie

ρ – gęstość cieczy

Zakładając stałą gęstość cieczy ρ otrzymujemy bilans objętości

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_0 - Q_1 - O_1 \quad (4)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = Q_1 - Q_2 - O_2 \quad (5)$$

$$\frac{dV_3}{dt} = Q_2 - Q_3 - O_3 \quad (6)$$

Objętość V_i zależy od poziomu H_i cieczy w zbiorniku (mierzonego od dna), a ten z kolei – od czasu t . Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej dostajemy

$$\frac{dV(H(t))}{dt} = \left. \frac{dV(H)}{dH} \right|_{H=H(t)} \cdot \frac{dH(t)}{dt} = S(H(t)) \cdot \dot{H}(t) \quad (7)$$

gdzie:

H – poziom cieczy w zbiorniku (mierzony od dna)

S – pole powierzchni swobodnej lustra cieczy

Pole powierzchni swobodnej lustra cieczy jest bowiem równe pochodnej objętości zgromadzonej cieczy względem jej poziomu w zbiorniku. Uwzględniając (7) w (4)–(6) otrzymuje się

$$\dot{H}_1(t) = \frac{1}{S_1} \left(Q_0(U) - Q_1(H_1(t)) - O_1(H_1(t)) \right) \quad (8)$$

$$\dot{H}_2(t) = \frac{1}{S_2(H_2(t))} \left(Q_1(H_1(t)) - Q_2(H_2(t)) - O_2(H_2(t)) \right) \quad (9)$$

$$\dot{H}_3(t) = \frac{1}{S_3(H_3(t))} \left(Q_2(H_2(t)) - Q_3(H_3(t)) - O_3(H_3(t)) \right) \quad (10)$$

gdzie:

H_i – poziom cieczy w i -tym zbiorniku

S_i – pole powierzchni swobodnej lustra cieczy w i -tym zbiorniku

Należy pamiętać, że konstrukcja zbiorników narzuca pewne ograniczenia na wartości zmiennych stanu. Jeśli założymy, że nigdy nie następuje przelanie zbiornika, to zachodzą następujące nierówności

$$0 \leq H_1(t) \leq b, \quad 0 \leq H_2(t) \leq c, \quad 0 \leq H_3(t) \leq r \quad (11)$$

Również strumień pompy Q_0 jest ograniczony

$$0 \leq Q_0 \leq \bar{Q}_0 \quad (12)$$

Pole powierzchni swobodnej lustra cieczy w i -tym zbiorniku wyraża się wzorem

$$S_i = dl_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (13)$$

gdzie:

d – wspólny wymiar wszystkich trzech zbiorników („grubość” – odległość między pionową ścianą czołową a ścianą tylną)

l_i – „długość” linii lustra cieczy, mierzona w płaszczyźnie ściany czołowej zbiornika (patrz rysunek 4)

Analiza rysunku 4 pozwala zapisać następujące zależności

$$l_1 = a \quad (14)$$

$$\frac{l_2 - n}{H_2} = \frac{m - n}{c} \quad (\text{z tw. Talesa}) \quad (15)$$

$$l_3^2 + (c - H_3)^2 = r^2 \quad (\text{z tw. Pitagoras}) \quad (16)$$

gdzie:

a, b, d – wymiary górnego zbiornika (o numerze 1): a, b – boki (szerokość i wysokość) prostokątnej ściany czołowej

c, m, n, d – wymiary środkowego zbiornika (o numerze 2): m, n – podstawy trapezu (górna i dolna), c – wysokość trapezu stanowiącego ścianę czołową zbiornika

r, d – wymiary dolnego zbiornika (o numerze 3): r – promień wycinka koła, który stanowi ścianę czołową zbiornika

Wzór (15) wynika z twierdzenia Talesa, zaś (16) – z twierdzenia Pitagorasa. Po przekształceniach dostajemy

$$l_1 = a \quad (17)$$

$$l_2 = n + \frac{m - n}{c} H_2 \quad (18)$$

$$l_3 = \sqrt{r^2 - (r - H_3)^2} = \sqrt{2rH_3 - H_3^2} \quad (19)$$

Uwzględniając (17)–(19) w (13) otrzymujemy

$$S_1 = a d = \text{const} \quad (20)$$

$$S_2 = S_2(H_2) = d \left(n + \frac{m - n}{c} H_2 \right) \quad (21)$$

$$S_3 = S_3(H_3) = d \sqrt{2rH_3 - H_3^2} \quad (22)$$

Dla $H_3 = 0$ pole powierzchni S_3 , wyznaczone według wzoru (22) jest równe 0. Stwarza to problem przy dzieleniu występującym w formule (10). By temu zapobiec zastąpimy S_3 ze wzoru (22) przez \tilde{S}_3 zdefiniowane jak niżej

$$\tilde{S}_3(H_3) = Z_3 q \left(\frac{S_3(H_3)}{Z_3} \right) \quad (23)$$

gdzie funkcja $q(\cdot)$ określona jest następująco

$$q(y) = \begin{cases} y, & 2 \leq y \\ \frac{1}{4} y^2 + 1, & 0 \leq y < 2 \\ 1, & y < 0 \end{cases} \quad (24)$$

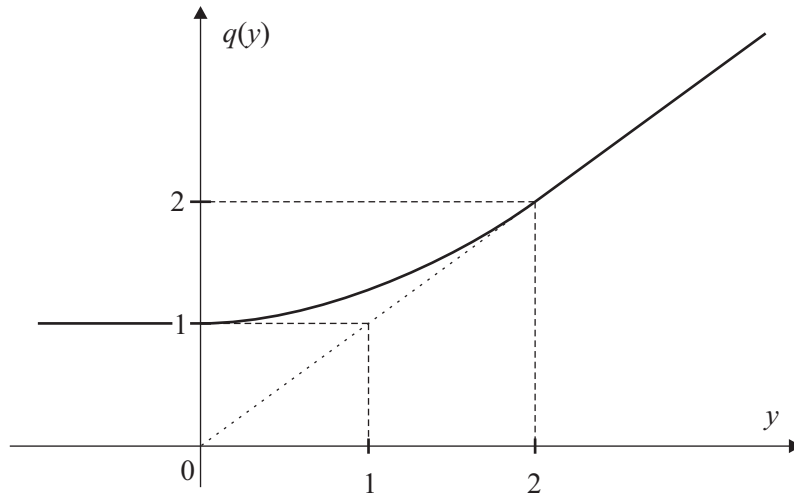
a jej wykres przedstawiony jest na rysunku 5. Sposób zdefiniowania funkcji $\tilde{S}_3(H_3)$ oraz $q(\cdot)$ zapewnia różniczkowalność zależności $\tilde{S}_3(H_3)$ w punkcie $H_3 = 2Z_3$. W zbudowanym modelu symulacyjnym przyjęto

$$Z_3 = 15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 15 \text{ cm}^2 \quad (25)$$

Objętość cieczy zgromadzonej w zbiorniku i -tym wyraża się wzorem

$$V_i = d A_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (26)$$

gdzie:



Rysunek 5: Wykres funkcji $q(\cdot)$

V_i – objętość cieczy zgromadzonej w zbiorniku i -tym

d – wspólny wymiar wszystkich trzech zbiorników („grubość”)

A_i – pole powierzchni czołowej zbiornika, mierzone od dna do linii lustra cieczy (patrz rysunek 4)

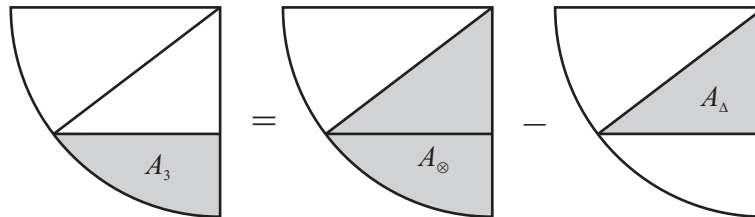
Wielkość A_1 można wyznaczyć ze wzoru na powierzchnię prostokąta, A_2 – ze wzoru na powierzchnię trapezu, zaś A_3 jest różnicą powierzchni dwóch figur: wycinka koła i trójkąta prostokątnego (patrz rysunek 6)

$$A_1 = a H_1 \quad (27)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (n + l_2) H_2 = \frac{1}{2} \left(n + n + \frac{m - n}{c} H_2 \right) H_2 = \left(n + \frac{m - n}{2c} H_2 \right) H_2 \quad (28)$$

$$A_3 = A_{\circlearrowleft} - A_{\Delta} \quad (29)$$

Pomocniczo zapiszemy wzór na kosinus kąta φ_3 zaznaczonego w trzecim zbiorniku na rysunku 4.



Rysunek 6: Sposób obliczania powierzchni A_3

$$\cos \varphi_3 = \frac{r - H_3}{r} \quad (30)$$

Stąd φ_3 wyraża się zależnością

$$\varphi_3 = \arccos \frac{r - H_3}{r} \quad (31)$$

Pola wycinka koła i trójkąta dane są wzorami

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} (r - H_3) l_3 = \frac{1}{2} (r - H_3) \sqrt{2rH_3 - H_3^2} \quad (32)$$

$$A_{\circlearrowleft} = \frac{\varphi_3}{2\pi} \pi r^2 = \frac{r^2 \varphi_3}{2} = \frac{r^2}{2} \arccos \frac{r - H_3}{r} \quad (33)$$

A stąd oraz z (29) dostajemy

$$A_3 = \frac{1}{2} (r^2 \varphi_3 - (r - H_3) l_3) = \frac{1}{2} \left(r^2 \arccos \frac{r - H_3}{r} - (r - H_3) \sqrt{2rH_3 - H_3^2} \right) \quad (34)$$

Stosując (27), (28) i (34) w (26) otrzymujemy

$$V_1 = a d H_1 \quad (35)$$

$$V_2 = d \left(n H_2 + \frac{m - n}{2c} H_2^2 \right) \quad (36)$$

$$V_3 = \frac{d}{2} \left(r^2 \arccos \frac{r - H_3}{r} - (r - H_3) \sqrt{2rH_3 - H_3^2} \right) \quad (37)$$

Zależność strumienia objętości Q_0 wymuszanego przez pompę od sterowania U podanego na silnik pompy (współczynnik wypełnienia sygnału PWM z przedziału $[0, 1]$) jest nieliniowa. Można ją aproksymować wielomianem piątego stopnia, pamiętając że ujemne wartości strumienia są niedopuszczalne

$$Q_0(U) = \max \{0, v(U)\} \quad (38)$$

$$v(U) = v_5 U^5 + v_4 U^4 + v_3 U^3 + v_2 U^2 + v_1 U + v_0$$

$$U \in [0, 1]$$

gdzie:

U – sterowanie dla silnika (współczynnik wypełnienia sygnału PWM) z przedziału $[0, 1]$

v_j – współczynniki wielomianu aproksymującego zależność strumienia objętości pompy Q_0 od sterowania dla silnika U

Współczynniki wielomianu (38), uzyskane w wyniku identyfikacji, zebrano w tabeli 1. Przy ich wyznaczaniu przyjęto, że strumień Q_0 wyrażony jest w jednostce układu SI (m^3/s). Maksymalny strumień pompy (maksymalna wydajność pompy), odpowiadający współczynnikowi wypełnienia 1, wynosi $\bar{Q}_0 = 288.6423 \text{ cm}^3/\text{s} = 0.2886423 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$. Wykres zależności (38) przedstawiony jest na rysunku 7.

v_5	v_4	v_3	v_2	v_1	v_0
$1.9287 \cdot 10^{-3}$	$-6.5254 \cdot 10^{-3}$	$8.9191 \cdot 10^{-3}$	$-6.2047 \cdot 10^{-3}$	$2.4298 \cdot 10^{-3}$	$-0.258 \cdot 10^{-3}$

Tablica 1: Współczynniki wielomianu aproksymującego strumień objętości pompy

Zależność strumienia objętości Q_i cieczy wypływającej przez zawór w dnie i -tego zbiornika od poziomu H_i cieczy w tym zbiorniku można aproksymować następującą funkcją

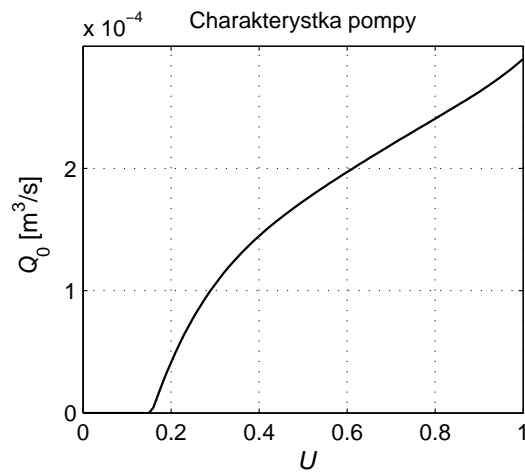
$$Q_i(H_i) = C_i \sqrt{H_i + D_i}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (39)$$

$$[Q_i] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}, \quad [H_i] = \text{m}$$

gdzie:

C_i, D_i – stałe we wzorze aproksymującym zależność strumienia objętości Q_i cieczy wypływającej przez zawór w dnie i -tego zbiornika od poziomu cieczy H_i w tym zbiorniku

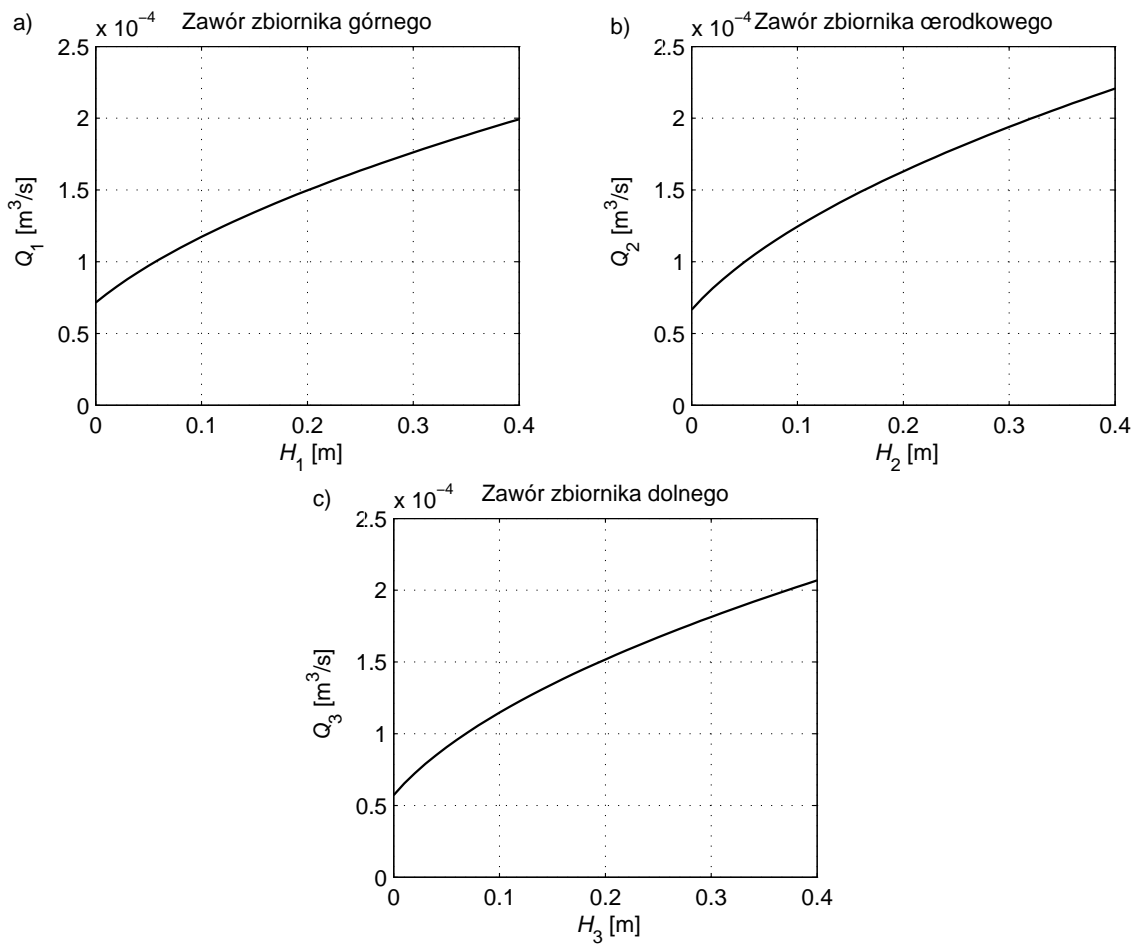
Przyjęta funkcja różni się od zależności wynikającej ze wzoru Torricelli'ego [1, s. 180] o stałą D_i , dodaną do argumentu H_i , reprezentującą (w przybliżeniu) długość pionowego odcinka rurociągu między dnem zbiornika a zaworem. Współczynniki C_i i D_i dla wszystkich trzech zbiorników, otrzymane w wyniku identyfikacji, zebrano w tabeli 2. Stosowano jednostki układu SI ($[H_i] = \text{m}$, $[Q_i] = \text{m}^3/\text{s}$). Na rysunku 8 przedstawiono wykresy zależności określonych wzorem 39.



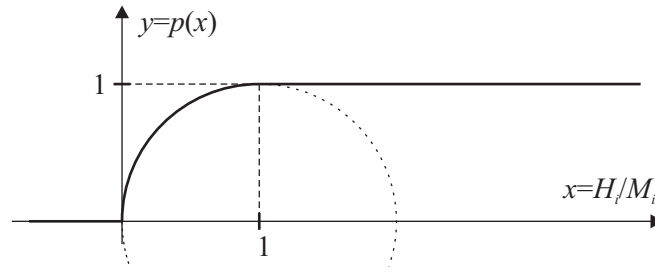
Rysunek 7: Zależność strumienia pompy od współczynnika wypełnienia sygnału PWM sterującego silnikiem DC napędzającym pompę

i	$C_i = w_{i1}$	$D_i = w_{i0}$
1	$294.05 \cdot 10^{-6}$	$5.9217 \cdot 10^{-2}$
2	$332.60 \cdot 10^{-6}$	$4.0083 \cdot 10^{-2}$
3	$314.24 \cdot 10^{-6}$	$3.3205 \cdot 10^{-2}$

Tablica 2: Współczynniki funkcji aproksymujących strumienie objętości zaworów



Rysunek 8: Zależność $Q_i(H_i)$ według wzoru (39) dla zaworu w zbiorniku: a) górnym, b) środkowym, c) dolnym.



Rysunek 9: Wykres funkcji $p(\cdot)$

Wzór (39) ma poważny mankament: dla zerowej wartości poziomu H_i , odpowiadającej próżnemu zbiornikowi, otrzymuje się niezerową wartość przepływu. Ten niepożądany efekt można usunąć, modyfikując formułę (39) w podany niżej sposób

$$Q_i(H_1) = p\left(\frac{H_i}{M_i}\right) C_i \sqrt{H_i + D_i} \quad (40)$$

przy czym funkcja $p(\cdot)$ wyraża się wzorem

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sqrt{2x - x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases} \quad (41)$$

zaś M_i jest dodatnią stałą wielokrotnie mniejszą od wysokości i -tego zbiornika. Wykres funkcji $p(\cdot)$ przedstawiono na rysunku 9. Wykres ten powstaje z łuku okręgu oraz półprostej. Wzór definiujący funkcję $p(\cdot)$ dla argumentu z przedziału $[0, 1)$ łatwo otrzymać z formuły opisującej okrąg o środku w punkcie $(1, 0)$ i promieniu równym 1.

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1^2 \quad (42)$$

skąd

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \quad (43)$$

a dalej

$$y^2 = 1 - x^2 + 2x - 1 \quad (44)$$

następnie

$$y^2 = 2x - x^2 = (2 - x)x \quad (45)$$

i ostatecznie

$$y = \sqrt{2x - x^2} \quad (46)$$

Opisany wyżej sposób konstrukcji zależności $p(x)$ gwarantuje jej ciągłość i różniczkowalność w punkcie $x = 1$, co może być istotne dla zapewnienia poprawnego działania metody numerycznej rozwiązującej równania różniczkowe stanowiące modelem matematyczny obiektu regulacji. Jeśli poziom H_i jest większy bądź równy M_i , wartość funkcji $p(H_i/M_i)$ jest równa 1, wobec tego strumień Q_i wyraża się zależnością identyczną z (39). Jeśli natomiast H_i zbliża się do zera i jest mniejszy od M_i , strumień ulega zmniejszeniu w stosunku do wartości wyznaczonej z (39). W skrajnym przypadku, dla $H_i = 0$, strumień zeruje się. W zbudowanym modelu symulacyjnym przyjęto

$$M_1 = M_2 = M_3 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2 \text{ cm} \quad (47)$$

Funkcja $p(x)$, której wykres przedstawiono na rysunku 9, nie jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$. Gdyby stwarzało to problemy w obliczeniach numerycznych, można zastosować alternatywną funkcję $\tilde{p}(\cdot)$, zdefiniowaną następująco

$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ w(x), & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases} \quad (48)$$

gdzie $w(\cdot)$ jest wielomianem najniższego możliwego stopnia dobranym w taki sposób, aby zapewnić ciągłość i różniczkowalność funkcji $\tilde{p}(\cdot)$ w punktach $x = 0$ i $x = 1$. Wymagania te można zapisać w postaci układu czterech równań

$$w(0) = 0 \quad \wedge \quad w'(0) = 0 \quad \wedge \quad w(1) = 1 \quad \wedge \quad w'(1) = 0 \quad (49)$$

Rozwiązania poszukiwać będziemy wśród wielomianów stopnia co najwyżej trzeciego

$$w(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \quad (50)$$

którego pochodna wyraża się wzorem

$$w'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \quad (51)$$

Wstawiając (50) i (51) do (49) otrzymuje się układ równań

$$w(0) = \delta = 0 \quad (52)$$

$$w'(0) = \gamma = 0 \quad (53)$$

$$w(1) = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \quad (54)$$

$$w'(1) = 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \quad (55)$$

Wstawiając dwa pierwsze równania do dwóch kolejnych dostajemy

$$\alpha + \beta = 1 \quad (56)$$

$$3\alpha + 2\beta = 0 \quad (57)$$

a stąd, wstawiając do drugiego równania wyrażenie $\beta = 1 - \alpha$, uzyskane z równania pierwszego, mamy

$$3\alpha + 2(1 - \alpha) = 0 \quad \implies \quad \alpha = -2 \quad (58)$$

Ostatecznie współczynniki wielomianu przyjmują wartości $\alpha = -2$, $\beta = 3$, wielomian wyraża się wzorem $w(x) = -2x^3 + 2x^2$, a funkcja $\tilde{p}(\cdot)$ opisana jest formułą

$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -2x^3 + 2x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases} \quad (59)$$

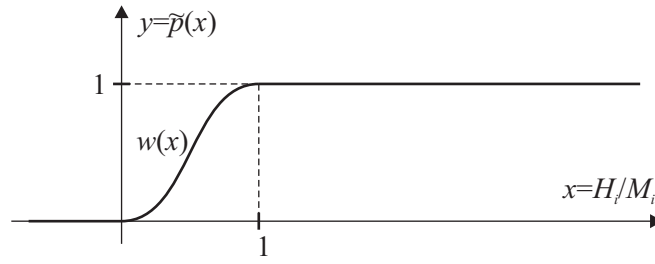
Jej wykres przedstawiono na rysunku 10.

We wzorach (8)–(10) występują funkcje $O_i(H_i)$, określające wartość strumienia cieczy przelewającej się przez górną krawędź zbiornika, jeśli nastąpiło jego przepełnienie. Funkcje te można w przybliżeniu opisać następującymi wzorami [1, s. 182]

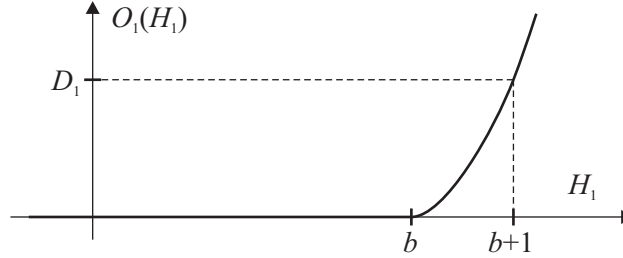
$$O_1(H_1) = E_1 (H_1 - b)^{\frac{3}{2}} \mathbb{1}(H_1 - b) = \begin{cases} 0, & H_1 \leq b \\ E_1 (H_1 - b)^{\frac{3}{2}}, & H_1 > b \end{cases} \quad (60)$$

$$O_2(H_2) = E_2 (H_2 - c)^{\frac{3}{2}} \mathbb{1}(H_2 - c) = \begin{cases} 0, & H_2 \leq c \\ E_2 (H_2 - c)^{\frac{3}{2}}, & H_2 > c \end{cases} \quad (61)$$

$$O_3(H_3) = E_3 (H_3 - r)^{\frac{3}{2}} \mathbb{1}(H_3 - r) = \begin{cases} 0, & H_3 \leq r \\ E_3 (H_3 - r)^{\frac{3}{2}}, & H_3 > r \end{cases} \quad (62)$$



Rysunek 10: Wykres funkcji $\tilde{p}(\cdot)$



Rysunek 11: Wykres funkcji $O_1(H_1)$

Wyrażenia w nawiasach mówią o ile poziom cieczy w zbiorniku jest większy od jego wysokości (o ile lustro cieczy „wystaje” ponad górną krawędź zbiornika). Występujące w powyższych wzorach stałe E_i , wyrażają się formułą

$$E_i = \frac{2}{3} o_i \sqrt{2g} \quad (63)$$

gdzie o_i to łączna długość górnej krawędzi i -tego zbiornika, przez którą przelewa się woda (liczona na całym obwodzie)

$$o_1 = 2(a + d) \quad (64)$$

$$o_2 = 2(m + d) \quad (65)$$

$$o_3 = 2(r + d) \quad (66)$$

Obecna we wzorze (63) stała g to współczynnik przyspieszenia ziemskiego (9.81 m/s^2). Wartości stałych E_i , obliczone według (63) i wyrażone w jednostkach układu SI, wynoszą odpowiednio $E_1 = 2.1261$, $E_2 = 3.3546$ i $E_3 = 2.5986$. Przybliżony kształt wykresu funkcji $O_1(H_1)$ przedstawiono na rysunku 11.

Biorąc pod uwagę wydajność pompy \bar{Q}_0 oraz wartości stałych C_i zaworów, można założyć, że poziomy H_i nigdy nie przekraczają wysokości zbiorników bardziej niż o wartość parametru Δ_i , którą przyjmijemy jako równą $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 10^{-2} \text{ m} \quad (67)$$

2.1 Parametry modelu matematycznego

W tabeli 3 zebrano wszystkie parametry występujące w modelu matematycznym obiektu oraz podano ich wartości i jednostki. Zaznaczono również, które parametry podlegały identyfikacji, które oszacowano, a które przyjęto arbitralnie.

3 Stan ustalony

Przy wyznaczaniu wartości poziomów i strumieni w stanie ustalonym przyjmuje się następujące uproszczenia:

1. Nie stosuje się formuł przelewu (60)-(62). Zamiast tego przyjmuje się, że jeśli woda przelewa się przez górną krawędź zbiornika, poziom cieczy jest równy jego wysokości.

Tablica 3: Parametry modelu matematycznego kaskady zbiorników

Nr	Oznaczenie	Jednostka	Wartość	Pochodzenie
1	d	m	$5 \cdot 10^{-2}$	mierzone
2	a	m	$31 \cdot 10^{-2}$	zmierzone
3	b	m	$39.5 \cdot 10^{-2}$	zmierzone
4	c	m	$39.6 \cdot 10^{-2}$	zmierzone
5	m	m	$51.8 \cdot 10^{-2}$	zmierzone
6	n	m	$10.3 \cdot 10^{-2}$	zmierzone
7	r	m	$39 \cdot 10^{-2}$	zmierzone
8	C_1	$m^{5/2} \cdot s^{-1}$	$294.05 \cdot 10^{-6}$	zidentyfikowane
9	D_1	m	$5.9217 \cdot 10^{-2}$	zidentyfikowane
10	C_2	$m^{5/2} \cdot s^{-1}$	$332.60 \cdot 10^{-6}$	zidentyfikowane
11	D_2	m	$4.0083 \cdot 10^{-2}$	zidentyfikowane
12	C_3	$m^{5/2} \cdot s^{-1}$	$314.24 \cdot 10^{-6}$	zidentyfikowane
13	D_3	m	$3.3205 \cdot 10^{-2}$	zidentyfikowane
14	E_1	$m^{3/2} \cdot s^{-1}$	2.1261	oszacowane
15	E_2	$m^{3/2} \cdot s^{-1}$	3.3546	oszacowane
16	E_3	$m^{3/2} \cdot s^{-1}$	2.5986	oszacowane
17	M_1	m	$2 \cdot 10^{-2}$	arbitralne
18	M_2	m	$2 \cdot 10^{-2}$	arbitralne
19	M_3	m	$2 \cdot 10^{-2}$	arbitralne
20	Z_1	m^2	$15 \cdot 10^{-4}$	arbitralne
21	Z_2	m^2	$15 \cdot 10^{-4}$	arbitralne
22	Z_3	m^2	$15 \cdot 10^{-4}$	arbitralne
23	Δ_1	m	$1 \cdot 10^{-2}$	arbitralne
24	Δ_2	m	$1 \cdot 10^{-2}$	arbitralne
25	Δ_3	m	$1 \cdot 10^{-2}$	arbitralne

2. Nie stosuje się formuły (40) uwzględniającej zmniejszenie strumienia dla poziomu cieczy bliskiego zeru. Zamiast tego używany jest wzór (39). Jeśli strumień cieczy płynącej przez zawór spada poniżej $C_i \sqrt{D_i}$, przyjmuje się zerową wartość poziomu H_i .

W stanie ustalonym (w punkcie równowagi) pochodne wszystkich zmiennych stanu są równe zeru

$$\dot{H}(t) = 0 \quad (68)$$

Stąd oraz z równań (8)–(10) wynikają wzory

$$Q_0 = Q_1 + O_1 \quad (69)$$

$$Q_1 = Q_2 + O_2 \quad (70)$$

$$Q_2 = Q_3 + O_3 \quad (71)$$

Przy wyznaczaniu stanu ustalonego zachodzi konieczność obliczenia poziomu H_i dla danego strumienia Q_i . Przekształcając wzór (39) otrzymujemy

$$\frac{Q_i}{C_i} = \sqrt{H_i + D_i} \quad (72)$$

$$\frac{Q_i^2}{C_i^2} = H_i + D_i \quad (73)$$

$$H_i = \frac{Q_i^2}{C_i^2} - D_i \quad (74)$$

Opisywany system dynamiczny (kaskada zbiorników) posiada nieskończenie wiele punktów równowagi. By ujednoznaczyć zadanie ich poszukiwania, należy ustalić i zadać wybrane zmienne występujące w modelu matematycznym. Największe znaczenie praktyczne mają wymienione niżej warianty:

1. Obliczanie punktu równowagi dla zadanego strumienia pompy Q_0
2. Obliczanie punktu równowagi dla zadanego poziomu cieczy jednym, wybranym zbiorniku:
 - (a) górnym (H_1)
 - (b) środkowym (H_2)
 - (c) dolnym (H_3)

Jeśli zadana jest wartość strumienia Q_0 , należy kolejno wykonać następujące obliczenia:

1. Założyć, że strumień Q_1 równa się strumieniowi Q_0 .
2. Wyznaczyć wartość poziomu H_1 odpowiadającą założonemu strumieniowi Q_1 , korzystając ze wzoru (74).
3. Jeśli wartość poziomu H_1 przekracza wysokość górnego zbiornika b , należy ją do tej wartości zmniejszyć i dla tej nowej wartości obliczyć wartość strumienia Q_1 ze wzoru (39). W przeciwnym razie H_1 pozostaje bez zmiany, a Q_1 równa się Q_0 .
4. Jeśli poziom H_1 jest ujemny, należy jego wartość zastąpić zerem.
5. Założyć, że strumień Q_2 równa się strumieniowi Q_1 .
6. Wyznaczyć wartość poziomu H_2 odpowiadającą przyjętemu strumieniowi Q_2 , korzystając ze wzoru (74).
7. Jeśli wartość poziomu H_2 przekracza wysokość środkowego zbiornika c , należy ją do tej wartości zmniejszyć i dla tej nowej wartości obliczyć wartość strumienia Q_2 ze wzoru (39). W przeciwnym razie H_2 pozostaje bez zmiany, a Q_2 równa się Q_1 .

8. Jeśli poziom H_2 jest ujemny, należy jego wartość zastąpić zerem.
9. Założyć, że strumień Q_3 równa się strumieniowi Q_2 .
10. Wyznaczyć wartość poziomu H_3 odpowiadającą przyjętemu strumieniowi Q_3 , korzystając ze wzoru (74).
11. Jeśli wartość poziomu H_3 przekracza wysokość górnego zbiornika r , należy ją do tej wartości zmniejszyć i dla tej nowej wartości obliczyć wartość strumienia Q_3 ze wzoru (39). W przeciwnym razie H_2 pozostaje bez zmiany, a Q_3 równa się Q_2 .
12. Jeśli poziom H_3 jest ujemny, należy jego wartość zastąpić zerem.

Jeśli zamiast Q_0 zadana jest wartość wybranego poziomu (H_1 , H_2 albo H_3), powyższą procedurę należy odpowiednio zmodyfikować.

Bibliografia

- [1] Adam Tadeusz Troskoleński, *Hydromechanika*, Wydanie trzecie, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1969