

Detekcja zmian w szeregach czasowych za pomocą transformaty falkowej

Maciej Klemiato

Artykuł przedstawia podstawy teoretyczne ciągłej i dyskretnej transformaty falkowej oraz możliwości praktycznego zastosowania jej w analizie zdarzeń (takich jak np. wykrywanie skoków wartości średniej) w zaszumionych szeregach czasowych. Omawiane algorytmy mogłyby znaleźć zastosowanie w diagnostyce przebiegów procesowych w zaawansowanych systemach automatyki.

Zaawansowane systemy automatyki, oprócz algorytmów regulacji, systemów wizualizacji i archiwizacji danych pomiarowych, powinny być także wyposażone w moduły diagnostyczne. Moduły te pełnią rolę nadzorcę procesu przemysłowego, diagnozując sprawność systemu sterowania i jego poszczególnych elementów, takich jak czujniki, człony wykonawcze czy magistrale komunikacyjne. Jednym z podstawowych elementów systemów diagnostycznych jest analiza zdarzeń w szeregach zmiennych procesowych. Przykładem takiej analizy jest segmentacja szeregów czasowych umożliwiającą wykrycie okresów stacjonarności (stanów ustalonych), skoków wartości średniej lub wariancji. Jednym z podstawowych narzędzi do analizy zdarzeń w szeregach czasowych jest algorytm Page-Hinkleya bazujący na testach stosunku funkcji wiarygodności (ang. *Likelihood Ratio* - LR) [2]. Stosuje się także filtry wykorzystujące wieloaspektowe testy statystyczne. Powyższe metody zostały opisane we wcześniejszym artykule autora [1].

Oprócz metod statystycznych stosuje się również klasyczne narzędzia analizy częstotliwościowej (*transformata Fouriera*) oraz metody bardziej zaawansowane takie jak np. *transformata falkowa* [3, 4]. Analiza falkowa, będąca przedmiotem niniejszego artykułu, jest bardziej predysponowana do zastosowania do sygnałów przejściowych lub niestacjonarnych niż klasyczna analiza fourierowska. W kolejnych rozdziałach przedstawione zostaną pokrótce założenia ciągłej i dyskretnej transformaty falkowej oraz przykłady ich praktycznych zastosowań.

Analiza czasowo-częstotliwościowa

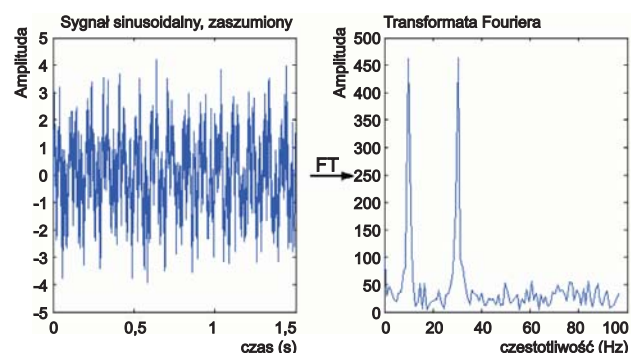
Dobrze znana i szeroko wykorzystywana w analizie sygnałów transformata Fouriera (ang. *Fourier Transform* - FT) dokonuje dekompozycji sygnału na składowe sinusoidalne o różnych częstotliwościach:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

dr inż. Maciej Klemiato, Katedra Automatyki, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

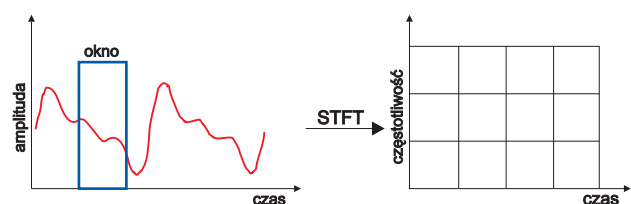
gdzie $F(\omega)$ jest widmem częstotliwościowym, a $f(t)$ badaną realizacją czasową.

Podczas transformacji następuje zmiana dziedziny czasu na dziedzinę częstotliwości (rys. 1). W wyniku tej operacji informacja czasowa zostaje utracona. Jest to poważną wadą w przypadku analizy sygnałów niestacjonarnych, gdy informacja o chwili wystąpienia i czasie trwania danego zjawiska jest bardzo istotna (jak w analizie zdarzeń w szeregach zmiennych procesowych). Z tego względu transformata Fouriera jest skuteczna jedynie dla sygnałów periodycznych, regularnych i stacjonarnych.



Rys. 1. Transformata Fouriera. Przebieg z dziedziny czasu (sygnał po lewej) do dziedziny częstotliwości (sygnał po prawej)

W pewnym stopniu remedium na wady transformaty Fouriera jest zaproponowana w 1946 r. przez Denisa Gabora *krótkookresowa transformata Fouriera* (ang. *Short-Time Fourier Transform* - STFT). Transformata ta, za pomocą przesuwanego wzdłuż sygnału okna czasowego $w(t)$, dzieli sygnał na małe kawałki, które można uznać za stacjonarne.



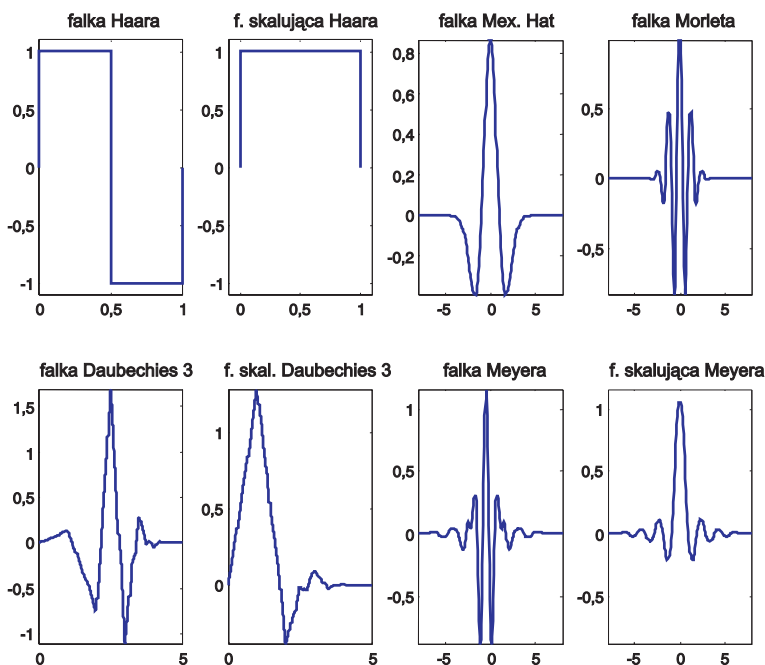
Rys. 2. Zasada działania STFT

Następnie kawałki te są poddawane FT (rys. 2):

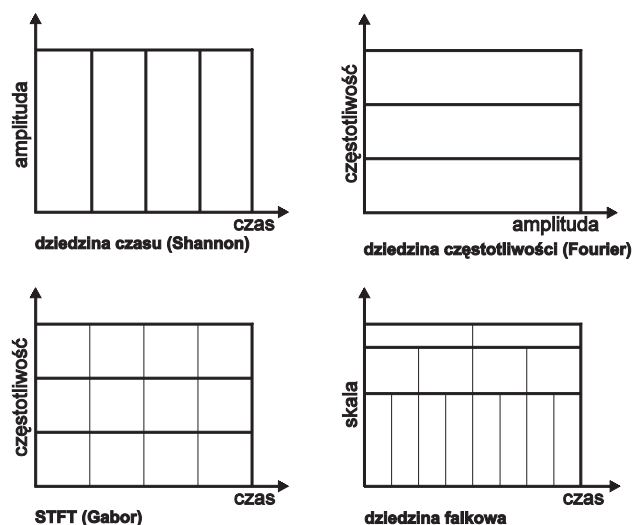
$$F(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)w(t-\tau)]e^{-j\omega t} dt \quad (2)$$

W ten sposób w pewnym stopniu odzyskuje się traconą przez FT informację czasową.

Główną wadą STFT jest fakt, że jakość informacji częstotliwościowej jest odwrotnie proporcjonalna do jakości informacji czasowej. Związane jest to z szerokością okna czasowego, która jest stała. Dla wąskiego okna występują: dobra rozdzielczość czasowa i słaba rozdzielczość częstotliwościowa, dla szerokiego okna sytuacja jest odwrotna. Transformata falkowa natomiast dokonuje dekompozycji sygnału na składowe fale w różnych częstotliwościach (skalach) i różnych pozycjach. Ponieważ falka zmienia swoją szerokość (skalę), nie występuje tu, jak w STFT, an-



Rys. 4. Różne rodzaje falek oraz odpowiadające im funkcje skalujące. Oś pozioma oznacza czas (próbki), a oś pionowa – amplitudę



Rys. 3. Różnice w rozdzielczości w dziedzinach: czasowej, częstotliwościowej, transformaty STFT oraz falkowej

tagonizm między rozdzielczością informacji czasowej a rozdzielczością informacji częstotliwościowej. Falkę można tu rozpatrywać w kategoriach okna o zmiennej szerokości. Dla porównania, na rys. 3 przedstawiono rozdzielczość reprezentacji czasowej, częstotliwościowej, STFT oraz falkowej.

Asymetria i nieregularne kształty niektórych falek naturalnie predysponują je do analizy sygnałów przejściowych, o dużych zakłóceniach, gwałtownych zmianach i pikach (powszechnie występujących w instalacjach przemysłowych). Sygnały takie o wiele trudniej odwzorować za pomocą sinusoid. Ponieważ dla różnych falek uzyskuje się różne reprezentacje tego samego sygnału, kluczową sprawą jest wybór falki bazowej. Jest to bardzo ważny element całej analizy. Na rys. 4 przedstawiono kilka najbardziej popularnych falek.

Ciągła transformata falkowa

Ciągła transformata falkowa (ang. *Continuous Wavelet Transform* – CWT) ma postać:

$$f_{\psi}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (3)$$

gdzie: $\psi \in L^2(\mathbf{R})$, $f \in L^2(\mathbf{R})$ – funkcje ciągłe, całkowalne z kwadratem, $b \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}^+$.

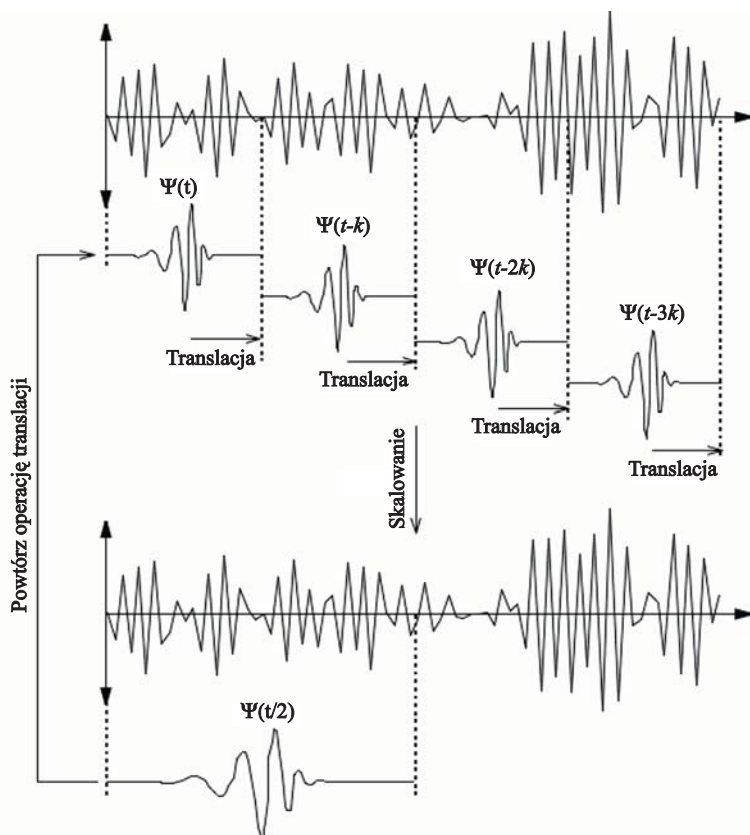
Jądrzem transformaty falkowej jest falka podstawowa (bazowa) $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ (ang. *mother wavelet*). Generalnie jest ona funkcją oscylującą, szybko zanikającą lub określoną na nośniku zwartym, o zerowej wartości średniej.

Rodzina falek jest tworzona z falki podstawowej poprzez jej przesunięcie, realizowane przez parametr translacji b oraz zmianę jej skali (częstotliwości) realizowanej przez parametr skalujący a :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad (4)$$

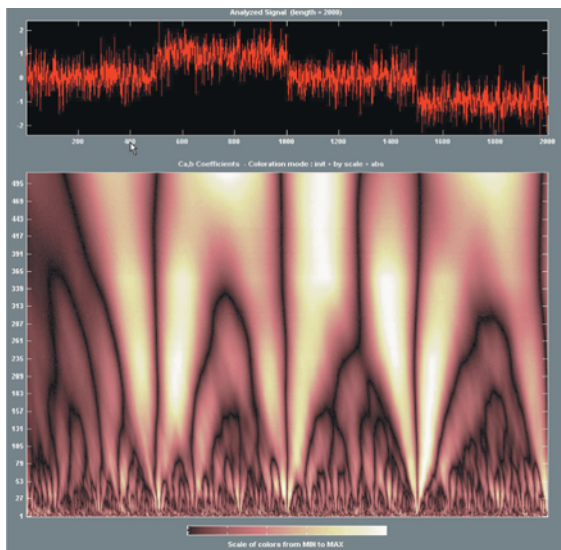
Czynnik normalizujący $a^{-1/2}$ sprawia, że wszystkie falki rodziny mają taką samą energię.

Wzór (3) generuje współczynniki falkowe $f_{\psi}(a, b)$, które są funkcją skali a i przesunięcia b . **Współczynnik falkowy jest miarą podobieństwa (korelacji) między sygnałem $f(t)$ a falką dla odpowiedniej skali i pozycji.** Rys. 5 obrazuje procedurę obliczania tych współczynników. Falka jest przesuwana wzdłuż sygnału i dla każdej jej pozycji obliczany jest współczynnik falkowy. Po osiągnięciu końca sygnału, falka zostaje przeskalowana, powraca na początek sygnału i cała procedura się powtarza. Zestaw wszystkich współczynników $f_{\psi}(a, b)$ reprezentuje sygnał $f(t)$ w dziedzinie falkowej.



Rys. 5. Procedura obliczania współczynników falkowych dla CWT. Oś pozioma oznacza czas (próbki), a oś pionowa - amplitudę

Istnieją różne metody graficznej reprezentacji ciągłej transformaty falkowej. Rys. 6 przedstawia jedną z nich: dwuwymiarową reprezentację współczynników falkowych w funkcji czasu (oś pozioma) i skali (oś pionowa), gdzie kolor oznacza amplitudę współczynników. Analizowany jest tu sygnał skokowy, zakłócony szumem białym. W miejscach zmian wartości średniej (tj. w próbkach 500, 1000, 1500) wyraźnie widać pionowe



Rys. 6. Wizualizacja ciągłej transformaty falkowej z zastosowaniem falki db3. Na górze: analizowany sygnał (czerwony), na dole: wykres współczynników falkowych dla tego sygnału

czarne linie (odpowiadające lokalnym minimum współczynników), które je identyfikują. Można by zatem stosować tę transformatę jako detektor skokowych zmian w sygnale. Największym problemem jest tu dobór odpowiedniej falki i skali, w której będzie widoczna oczekiwana informacja. Nie istnieje jednoznaczny algorytm umożliwiający automatyczny dobór tych parametrów, jest to raczej kwestia doświadczenia w doborze falki do charakteru analizowanego sygnału.

Dyskretna transformata falkowa

Transformata falkowa jest przekształceniem dwuparametrowym, odwzorowującym jednowymiarowy sygnał $f(t)$ w dwuwymiarową tablicę współczynników $c_{j,k}$:

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (5)$$

gdzie zbiór funkcji falkowych $\psi_{j,k}(t)$ jest zazwyczaj bazą ortogonalną oraz $j \in (0, \infty)$, $k \in (-\infty, \infty)$. Zbiór wszystkich współczynników $c_{j,k}$ jest nazywany *dyskretną transformatą falkową* (ang. *Discrete Wavelet Transform* - DWT) sygnału $f(t)$, a wzór (5) jest transformatą

odwrotną. Wprowadzając tzw. *funkcję skalującą* $\varphi_{j,k}$, sygnał $f(t)$ można przedstawić jako:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \varphi_k(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (6)$$

Pierwsza suma we wzorze (6) stanowi *aproksymację* sygnału, druga suma, wraz ze wzrostem j , reprezentuje coraz bardziej szczegółowe *detale* sygnału. Oczywiście w praktyce zakres sumowania jest skończony, tak jak skończony jest analizowany sygnał $f(t)$.

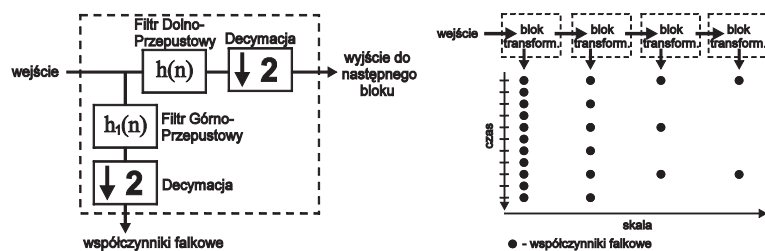
Transformatę falkową można rozpatrywać w kategoriach *filtrów cyfrowych*. Jeżeli wyrazimy funkcję skalującą $\varphi(t)$ i falkę $\psi(t)$ jako sumę ważoną przesuniętych funkcji skalujących z wyższego poziomu $\varphi(2t)$:

$$\varphi(t) = \sum_n h(n) \sqrt{2} \varphi(2t - n) \quad (7)$$

$$\psi(t) = \sum_n h_1(n) \sqrt{2} \varphi(2t - n) \quad (8)$$

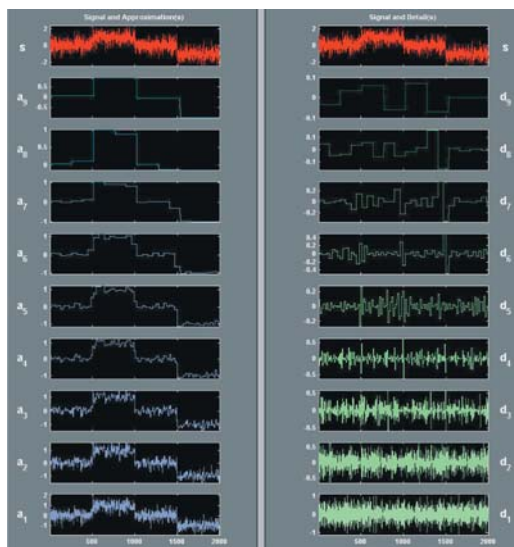
to $h(n)$ i $h_1(n)$ możemy traktować jako współczynniki cyfrowego filtra FIR. Parametr n oznacza wtedy długość filtra (liczbę jego współczynników), a sumowanie we wzorach (7) i (8) przebiega od 1 do n .

Pojedynczy blok transformacyjny jest przedstawiony na rys. 7. Filtr górnoprzepustowy $h_1(n)$ reprezentuje falkę podstawową i na wyjściu produkuje współczynniki falkowe (detale sygnału). Filtr dolnoprzepustowy $h(n)$ reprezentuje funkcję skalującą i na wyjściu daje aproksymację sygnału. Cały proces dekompozycji polega na przepływie sygnału przez identyczne bloki transformacyjne, tak że wyjście z poprzedniego bloku jest wejściem do następnego bloku.



Rys. 7. Pojedynczy blok transformacyjny (po lewej) oraz cały proces dekompozycji (po prawej)

Podobnie jak w przypadku CWT, istnieje szereg możliwości graficznej reprezentacji DWT. Na rys. 8 zostały pokazane przebiegi aproksymacji i detali dla tego samego sygnału, który był analizowany za pomocą CWT na rys. 6. Jak widać, aproksymacje, wraz ze wzrostem poziomu dekompozycji, są coraz gładzsze – stosunek sygnału do szumu jest coraz większy. Sygnał aproksymacji na 9. poziomie (a_9) mógłby z powodzeniem być wykorzystany jako funkcja decyzyjna dla celów rozpoznawania momentu zmiany wartości średniej zakłóconego sygnału.



Rys. 8. Przebiegi aproksymacji i detali. Kolumna lewa zawiera analizowany sygnał (na górze) oraz kolejne jego aproksymacje (od a_1 do a_9). W kolumnie prawej analogicznie przedstawione są detale (od d_1 do d_9)

Podsumowanie

W artykule przedstawiono podstawy teoretyczne transformaty falkowej oraz możliwości praktycznego jej zastosowania w analizie zdarzeń w szeregach czasowych, takich jak wykrywanie skoków wartości średniej. Narzędzie to jest w stanie precyzyjnie wykryć moment zmiany nawet w mocno zaszumionym sygnale. Jednakże należy podkreślić, że przedstawiona analiza została przeprowadzona w trybie off-line, tzn. analizowany szereg czasowy był dostępny w całości. To oczywiście ogranicza możliwości zastosowania tego podejścia w ciągłych systemach nadzorowania, gdzie wymagany jest tryb on-line, tzn. kolejne próbki sygnału „przychodzą” z instalacji. Zastosowanie transformaty

falkowej w trybie on-line jest także możliwe, lecz bardziej skomplikowane. Teoretycznie, zakres sumowania we wzorze (6) jest nieskończony. W praktyce długość sygnału poddawanego transformacji musi być skończona. Co więcej, ze względu na specyfikę przekształcenia, długość ta musi być wielokrotnością potęgi liczby dwa.

Wymagane jest zatem dopełnianie sygnału (tzw. symetryzacja lub dopełnianie zerami). Dopełnianie oraz skończona długość sygnału powodują błędy brzegowe. Błędy te z kolei powodują zniekształcenia transformacji (co w pewnych zastosowaniach może być istotne). Zagadnienia te wykraczają jednak poza obszar niniejszego artykułu.

Na rynku istnieje sporo różnego rodzaju oprogramowania do efektywnego obliczania transformaty falkowej. Na przykład bardzo rozbudowany Wavelet Toolbox (dla środowiska Matlab) [6], czy Numerical Recipes – znany pakiet bibliotek języka C, zawierający również procedury dla DWT [5]. W Internecie można znaleźć również wiele darmowych aplikacji [7].

Artykuł został napisany w ramach grantu finansowanego z Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego w Programie Operacyjnym Innowacyjna Gospodarka. Nr grantu: UDA-POIG.01.03.01-12-171/08/00

Bibliografia

1. M. Klemiato, *Przegląd statystycznych metod detekcji nagłych zmian w przebiegach procesowych*, Pomiary Automatyka Robotyka nr 1/2006
2. M. Basseville, I. Nikiforov, *Detection of Abrupt Changes: Theory and Applications*, Prentice Hall, 1993
3. T. P. Zieliński, *Reprezentacje sygnałów niestacjonarnych typu czas-częstotliwość i czas-skala*, Zeszyty Naukowe AGH, 1994
4. R. K. Young, *Wavelet Theory and Its applications*, Kluwer Academic Publ., Boston, 1993
5. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 2007
6. <http://www.mathworks.com/products/wavelet>
7. <http://www.amara.com/current/wavesoft.html>